This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

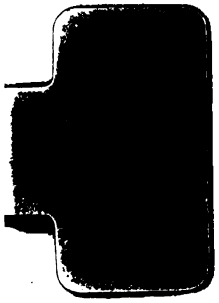
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

183. f.
23.



MANIERA

GEOMETRICA E RIGOROSA

DI OTTENER L' AREA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO

EQUIVALENTE AD UN CERCHIO;

ED I RAPPORTI

CHE I LATI DEI POLIGONI REGOLARI,

CONCENTRICI, ISOPERIMETRI,

UNO CON UN LATO PIÙ DELL' ALTRO HANNO FRA ESSI.

OPUSCOLO

DI GIAMBATISTA MALACARNE

DI VICENZA

quærite et invenietis .....

.... quis quærit invenit.

J. C.

8 8

VICENZA.

TIPOGRAFIA PARONI

1858

183. f. 23.

La presente edizione è posta sotto la salvaguardia della Legge, ed ogni esemplare che non portasse la firma dell' Autore s' intenderà come apocrifo.

G·B·M·

DISCORSO PRELIMINARE

In geometria tutto quello che non è assurdo o contradditorio è possibile, e una cosa possibile è reale quando non si può negarla senza cadere in contraddizione. Non presenta alcuna assurdità ed è concepibile che un triangolo equilatero, un quadrato, un poligono regolare qualunque, il cerchio stesso abbia il medesimo perimetro. Tutta la serie di questi poligoni regolari hanno dunque un' esistenza di fatto e mi propongo di dimostrarlo. Determinar la maniera di trasformar l' area di un poligono qualunque in un cerchio equivalente, può essere estremamente difficile, ma il difficile non è impossibile.

Molti Geometri, varj Corpi Scientifici, e alcuni Accademici Istituti ricusando di esaminare le soluzioni del problema della QUADRATURA DEL CIRCOLO sembrano ammetterne la impossibilità. Per quanto sia il rispetto che si debba alle decisioni di questi Dotti elleno non sono dogmatiche, e si può dubitarne senza peccar di eresia.

Sino ad ora si è cercato la soluzione di questo problema in molte maniere senza alcun successo; ma si son forse esaminati tutti i rapporti nei quali la periferia di un cerchio concentrico ed equivalente ad un triangolo equilatero, tagliar può i lati del triangolo, per istabilire sufficientemente questa pre-

tesa impossibilità? Ammessa la periferia incommensurabile rapporto al suo diametro aritmeticamente, ne deriva che debba esserlo anche geometricamente? Perchè limitarsi a cercar in numeri questo rapporto, se una costruzione geometrica può darci un triangolo equilatero, quindi il quadrato equivalente al cerchio?

Quasi tutti i Geometri cominciando da Archimede si sono occupati di cercare il rapporto numerico del diametro alla circonferenza. Egli è dimostrato che se si conoscesse, la media proporzionale del raggio alla semi-periferia rettificata, sarebbe il lato del quadrato equivalente al cerchio. Tutti gli sforzi dei più grandi Matematici e dei più assidui Algebristi dei nostri tempi si sono ridotti ad approssimarsi quasi all' infinito; ma alcuno ancora non è arrivato a dare in numeri o in linee un rapporto preciso. Lo confesso: il rapporto in numeri mi ha sempre paruto impossibile, non per altro in linee. In effetto: concepiscasi due poligoni regolari uno inscritto e l' altro circoscritto al cerchio; più i loro lati duplicandosi aumenteranno in numero e più i poligoni si avvicineranno al circolo, ma non arriveranno mai a confondersi. Servendomi di un triangolo equilatero e di un cerchio concentrico, la cui periferia tagli a qualunque lato del triangolo una corda eguale alla metà del lato: il cerchio equivalerà al triangolo equilatero.

La soluzione analitica di questo problema avendo fino ad ora resistito alla forza prodigiosa del calcolo infinitesimale, impiegato da tanti celebri Geometri che si avvicinarono al loro scopo senza esservi pervenuti, non poteva che scoraggiarmi, ed era per abbandonare un sentiero che mi presentava

ostacoli sì numerosi e sì difficili. Limitato qual io mi sono nella sfera delle mie conoscenze, già disperava dell'esito; quando mi venne ad un tratto una felice inspirazione, che applicata alle mie ricerche, mi diede il più soddisfacente risultamento.

Ho sempre risguardato la Ciclometria aritmetica come avente la doppia proprietà di rettificare la circonferenza e di darne il rapporto col diametro. Egli è probabile che se si perviene a render retta la periferia in una maniera qualunque, non si avrà per questo un rapporto numerico esatto, perchè forse questo rapporto non esiste; ma sarà bensì vero che si avrà una retta uguale alla circonferenza nel modo stesso che si trova la radice del due o la radice del tre di un quadrato senza che si conosca il rapporto col suo lato, ovvero nella maniera che si divide una linea in media ed estrema ragione senza poterne dare il rapporto numerico. La Geometria degli antichi che dà rigorosamente un quadrato doppio o multiplice di un altro, ciò che non fa l'analisi de' moderni, mi ha sembrato convenire perfettamente alle mie ricerche.

Siccome i lati dei poligoni regolari che hanno perimetri equivalenti crescono in numero a proporzione che si avvicinano alla periferia, senza arrivar a confondersi, così questa è incommensurabile; e quindi la soluzione del problema può essere impossibile analiticamente e possibile geometricamente secondo che i Matematici la vogliono considerare.

La maniera degli antichi di cui mi servo non è a mio credere che un' analisi per raziocinio sopra delle figure, come l'Algebra lo è per dei segni sopra delle quantità. La prima esponendo delle proposi-

zioni dimostra per una catena di ragionamenti che esigono sempre un'attenzione non interrotta la verità dell'enunciato e le conseguenze che se ne vogliono dedurre; la seconda per delle formule, che risparmiano sì bene gli sforzi del nostro spirito, ci dà come per incanto le soluzioni che si domandano.

Alla vista della luminosa chiarezza che il più delle volte accompagna le dimostrazioni geometriche degli antichi, non posso astenermi da alcune riflessioni. Mi sembra che sarebbe da desiderarsi che fosse un poco meno trascurata dai moderni che la massima facilità dell'analisi algebrica getta di più in più in una estremità viziosa. Questo abuso ha già eccitato la dispiacenza di molti Geometri di primo ordine come Newton, Fermat, Maclaurin, Montucla che si sono lagnati del torto che faceva all'eleganza geometrica questa maniera di ridur tutto a calcolo. In effetto; il metodo degli antichi ha certi avvantaggi, che non gli possono esser ricusati da quelli che lo conoscono un poco. Sempre luminoso spande la chiarezza nel tempo stesso che produce la convinzione, in luogo che l'analisi algebrica convincendo lo spirito non vi porta alcun lume. In questo si conoscono distintamente tutti i passi che si fanno; nessun legame tra il principio e l'ultima delle conseguenze non iscappa alla intelligenza: nell'altra tutti i gradi intermedj sono in certo modo soppressi, e non si è convinto che pel concatenamento legittimo che si sa regnare nel meccanismo delle operazioni che formano una gran parte della soluzione.

[illegible]ano dal non riconoscere la supe-

[illegible] moderna riguardo alla Geometria

degli antichi. Non ho preteso biasimare che l'abuso di applicare il calcolo a dei casi ove un poco più di attenzione e di conoscenza in Geometria fornirebbero delle soluzioni molto più soddisfacenti per lo spirito. Perchè siccome non ci serviamo del quadrante per misurare un oggetto che si ha sotto mano; così non si dovrebbe impiegare il calcolo algebrico in quelle questioni ch' è superfluo. Ma bisognerebbe ignorare le sublimi scoperte della Geometria moderna per contestare la necessità assoluta di questo calcolo nelle ricerche di una certa natura, come quelle che occupano oggidì i nostri Geometri. In vano lo spirito il più laborioso e il più capace di attenzione e di meditazione si sforzerebbe di dispensarsi da questo soccorso; i rapporti che si trattano di sviluppare in queste ricerche sono sì complicati che abbisognerebbero per isvolgerli delle intelligenze di un ordine superiore al nostro. Usiamo dunque per iscoprire la verità delle potenti risorse che ci presentano questi metodi alla perfezione dei quali ogni nostra cura deve essere rivolta. Sono i soli da cui la Geometria e la Fisica devono d' ora innanzi aspettare dei veri progressi.

Queste riflessioni furono fatte avanti di me.

Poco importa che riguardar si voglia la soluzione di questo problema come sintetica o come analitica, secondo che si monta dal particolare al generale o che si discende dal generale al particolare; l' essenziale è che sia geometrica, e che si possa ottenere coll' ajuto della regola e del compasso. La mia maniera dà un triangolo, poi il quadrato equivalente al cerchio, e la terza proporzionale fra

il raggio ed il lato del quadrato, dà la semi-periferia rettificata, senza che si possa assegnare in numeri il suo rapporto col raggio. Ma il problema non è forse risoluto per questo? È egli necessario in Geometria di dare il rapporto numerico tra l'altezza di un triangolo qualunque e la metà della sua base, perchè la soluzione del problema che ha per oggetto di trovare il lato di un quadrato equivalente sia rigorosa? Alla fine, a che serve il rapporto in numeri del diametro alla periferia se non a rettificarla, e se si perviene a questo senza conoscerlo egli diventa inutile. Ora si può dire: sia che si conosca numericamente questo rapporto, sia che s' ignori, la questione non cambia; perchè l' ultima operazione di cercare la media proporzionale, ch' è il lato del quadrato, si farà sempre geometricamente, e col mio metodo si trova facilmente senza altre operazioni.

Se si crede a Diogene Laerce, quando Pittagora dimostrò che il quadrato costruito sopra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati costruiti sopra i due altri lati di questo triangolo, nell'eccesso della sua gioja sacrificò in onore di questa scoperta cento vittime alle Muse per essere stato sì bene inspirato. Quando si ha solamente percorso le diverse parti delle Matematiche bisogna convenire che questa proposizione è di un gran soccorso. Ma come Pittagora ha egli veduto gli avvantaggi che ne dovevano risultare? Aveva egli trovato per lo avanti un gran numero di proposizioni fondate sopra questa, e che non aspettavano che una tale scoperta per essere messe elleno pure nel numero delle grandi verità? La storia non ne parla. Io

concepisco facilmente la gran sensibilità di Pittagora al momento della sua scoperta; essa gli rende una testimonianza non equivoca della forza del suo genio. Ma un' ecatombe eseguita dall' inventore della metempsicosi mi sembra una riconoscenza estrema.

L' interesse della verità e della giustizia esige che questa soluzione sia giudicata rigorosamente e con imparzialità. Ma devo io lusingarmi di ottenerlo da quelli che ritengono per ferma la impossibilità dello scioglimento di siffatto problema, perchè dipende da un' equazione del terzo grado? Ne dubito: tanto più quando veggo qualche volta uomini dotti accecati dal loro amor-proprio difendere con ostinazione un errore di loro invenzione contro la verità da altri scoperta.

I più valenti geometri non risguardano per altro la QUADRATURA DEL CIRCOLO come impossibile; ma di una immensa difficoltà, ed io provo ch' è un problema elementare.

Perchè una cosa è rimasta incognita fino ai giorni nostri, malgrado gli sforzi degli uomini più grandi, ne viene che non potrà mai essere scoperta? Qual vanità è mai questa del nostro secolo! Pretendiamo noi forse d' essere arrivati all' apice del perfezionamento? Se il nostro amor-proprio potesse illuderci a questo punto, l' esperienza dovrebbe convincerci del contrario. Fortunatamente una scoperta non è un privilegio accademico, e si vedono spesso uomini di una limitata istruzione, riuscire per la semplicità dei loro mezzi in quelle cose che gli uomini più illuminati si perdono per trascendenti elucubrazioni.

Generalmente si crede, e stimabili giornali tratto

tratto lo ricordano, che la Francia non solo, ma anco l'Inghilterra abbiano stabiliti dei generosi premj per quello che dasse risoluto il famoso problema. Mi giova sperare che gli Scienziati, anco quelli che dubitavano della possibilità, vorranno rendersi all'evidenza; e perciò mi lusingo che i membri costituenti le Società Scientifiche, riconosciuta geometrica la mia costruzione, saranno i più zelanti propugnatori per farmi conseguire quelle giuste ricompense, che il tempo e la difficoltà dell'impresa avessero poste in oblio.

Non si dica, che la soluzione del problema della QUADRATURA DEL CIRCOLO sia più curiosa che utile, perchè arriva lo stesso di tutte le scoperte, e non se ne conosce l'utilità che quando s'incomincia a farne le applicazioni convenevoli. Egli è certo che la soluzione di vari altri problemi vi è attaccata, e che la pratica guadagnerà molto. La nuova strada che apre alla Geometria potrà condurla ben lunge, e l'analisi algebrica guidata da tale verità farà non attesi progressi. La mia perseveranza, anzi la mia ostinazione, non il sapere ha strappato alla scienza il nascosto secreto. Questa scoperta fa voltar carta al gran libro delle matematiche, ove si leggerà gli involuti arcani della scienza. È un nuovo fondamento all'antico edificio che qualche genio dotato di penetrazione potrebbe ingrandire. Non si può in un colpo d'occhio vedere l'ammirabile concatenamento che esiste fra tutte le verità, e non è che per gradi che ci è dato di conoscerlo. Mi riservo di farne l'applicazione per lo scioglimento di altri problemi non meno difficili che importanti.

SOLUZIONE DEI PROBLEMI

TEOREMA

Se si avrà un cerchio equivalente e concentrico ad un triangolo equilatero: i tre segamenti interni tagliati dai lati del triangolo al cerchio, saranno uguali in aja ai tre triangoli mistilinei ed esterni, tagliati dalla periferia al triangolo equilatero; e la corda di ogni segamento, la metà del lato del triangolo equilatero.

Dimostrazione. Sia il cerchio VET (vedi la figura) equivalente e concentrico al triangolo equilatero ABC. Essendo, per l'ipotesi, il cerchio equivalente al triangolo, o uguale in aja, ne viene che anco i tre segamenti interni tagliati dai lati del triangolo equilatero al cerchio, dovranno esser uguali in aja ai tre triangoli mistilinei esterni tagliati dalla periferia al triangolo; cioè uno dei segamenti VET, al triangolo mistilineo e contiguo TBL. Imperciocchè, tolto lo spazio comune al cerchio ed al triangolo, le párti che resteranno saranno uguali fra esse, e quindi le metà uguali alle metà; cioè la metà del segamento VET, ch' è DET, uguale alla metà del triangolo mistilineo TBL, ch' è TBY. Il triangolo mistilineo TBY, che ha l' angolo TBY di trenta gradi, uguale all'altro triangolo mistilineo EDT, che ha l' angolo EDT di novanta gradi. Ora il settore EOY, che ha un angolo di sessanta gradi, è la sesta parte del cerchio ed è composto del settore EOT e del settore

TOY; togliendo quindi al primo lo spazio EDT ed aggiungendo al secondo lo spazio TBY, che sono uguali, si avrà il triangolo DOB sesta parte del triangolo equilatero ABC e per conseguenza uguale al settore EOY. Si avrà ancora il triangolo DOT uguale al triangolo TOB, perchè ambi questi triangoli devono contenere lo stesso spazio, crescendo l' uno di tanto del suo settore, di quanto l' altro cala; e siccome hanno la medesima altezza DO, la stessa capacità e la base continuata nella direzione di DB col lato promiscuo TO, devono avere anche una base uguale; quindi DT uguale a TB e la corda VT, metà del lato AB del triangolo equilatero. Tirato il raggio OT ed il raggio OH indefiniti e prolungati egualmente il lati dell' angolo AOB: tutte le parallele ad AB comprese dall' angolo indefinito AOB saranno tagliate da OT ed OH nella stessa proporzione di AB ed i cerchi descritti coi raggi dei punti d' intersezione, equivalenti ai relativi triangoli equilateri.

La media proporzionale fra l' apotema del triangolo equilatero e la metà del suo perimetro, è il lato del quadrato equivalente al triangolo; quindi al cerchio e la sua *Quadratura* trovata; ossia, conosciuto il raggio del cerchio equivalente al quadrato ed il lato del quadrato stesso: la terza proporzionale, sarà la semi-periferia *rettificata*. Quindi la *rettificazione della periferia,* dà la *quadratura del circolo* e viceversa.

I RAPPORTI

CHE I POLIGONI CONCENTRICI, REGOLARI ED ISOPERIMETRI HANNO FRA ESSI

TEOREMA ED ESEMPIO PRIMO

Se si avrà un triangolo equilatero di cui ogni lato sia diviso in quattro parti uguali ed un quadrato concentrico che abbia ogni lato diviso in tre parti ciascheduna uguale ad una delle parti ch' è diviso un lato del triangolo equilatero: il quadrato avrà lo stesso contorno, o sarà isoperimetro al triangolo equilatero.

Dimostrazione. Sia il triangolo equilatero ABC il cui lato AB sia diviso in quattro parti uguali AV, VD, DT, TB. Dal punto X, metà di TB, si elevi una perpendicolare sino che incontri OP lato dell' angolo retto ROP. Egli è certo che un cerchio descritto col raggio OP circoscriverebbe il quadrato da compiersi sopra l' angolo retto XPZ. Ora XB essendo l' ottava parte di AB, o la quarta parte di DB; ne viene che PZ prolungata sino alla periferia del cerchio che ha OP per raggio, sarà lato del quadrato iscritto che numererà sei parti delle otto di AB, ovvero tre parti delle quattro del lato stesso; quindi il quadrato isoperimetro al triangolo equilatero con un lato di più.

TEOREMA ED ESEMPIO SECONDO

Se ora si dividerà il lato del medesimo quadrato in cinque parti uguali, cioè in una parte di più di quelle che era diviso il lato del triangolo

equilatero, e se si costruirà un pentagono regolare e concentrico il cui lato sia quattro parti del lato del quadrato: il pentagono sarà isoperimetro al quadrato avendo un lato di più.

Sia ZP la decima parte del lato del quadrato iscritto nel cerchio che abbia OP per raggio. È fuor di dubbio che innalzando la perpendicolare ZM sino che incontri in M il lato dell' angolo MOK, quinta parte della circonferenza, il cerchio che si volesse descrivere col raggio OM, circoscriverebbe un pentagono regolare, il cui angolo sarebbe diviso per metà da SO, come è diviso l' angolo retto ROP. Il lato di questo pentagono regolare si troverà col prolungare MN, parallela a ZP, fino alla circonferenza del cerchio avente OM per raggio, ovvero sino che incontrerà l' altro lato OK dell' angolo del pentagono. Ora essendo ZP la decima parte del lato del quadrato, il lato del pentagono sarà otto parti delle dieci, ossia quattro delle cinque del lato del quadrato. Quindi il pentagono isoperimetro al quadrato con un lato di più.

Egli è pure evidente che non si può iscrivere nel cerchio che i poligoni di tre, quattro, cinque e sei lati che sieno regolari e successivi; quindi l' angolo AOB di centoventi gradi, dà il lato AB del triangolo equilatero; l' angolo ROP di novanta gradi, dà il lato del quadrato; l' angolo KOM di settantadue gradi, dà il lato del pentagono regolare; l' angolo GON di sessanta gradi, dà l' esagono regolare, o il lato iscritto.

Non conoscendo l' angolo che rinchiude il lato dell' ettagono e di tanti altri poligoni regolari, non si può determinare il raggio del cerchio circoscrivente, come si è fatto fin qui. Che se fossero conosciuti gli angoli che misurano tutti i lati dei

poligoni regolari, si perverrebbe all' esaurimento della serie, ed il cerchio circoscritto si confonderebbe col poligono d' infiniti lati.

Chiaramente si vede che se si avrà una serie infinita di poligoni regolari di tre, quattro, cinque, sei lati in progressione aritmetica, essi saranno tutti isoperimetri, quando i loro lati saranno divisi colla legge indicata dagli esposti esempi; cioè quando il numero de' lati del poligono susseguente indicherà il numero delle parti eguali, ma relativamente più picciole, in cui il lato del poligono antecedente deve esser diviso, ch' è sempre una unità relativa di più.

Egli è pure evidente che in questa serie infinita di poligoni regolari ed isoperimetri, benchè conservino sempre lo stesso contorno le loro capacità crescono nella ragione dei loro apotemi; cosicchè, supponendo esaurita la serie, il poligono di un lato di più sarà lo stesso di quello di un lato di meno, ed allora i due poligoni si confonderanno col cerchio circoscritto, avendo egli lo stesso apotema dei poligoni d' infiniti lati infinitamente piccioli.

Egli è dimostrato che: *l' area di un poligono regolare ha per misura la metà del prodotto del suo perimetro pel suo apotema.* Ora il perimetro essendo sempre uguale, o lo stesso in tutti i poligoni, l' aumento dell' area del poligono, non può derivare che dall' apotema, dal quale deriva pure, in ugual ragione, l' aumento del cerchio iscritto e circoscritto.

Per togliere ogni obiezione sulla possibilità ed esattezza della costruzione di tutti gl' infiniti poligoni regolari, concentrici, isoperimetri; e della maniera colla quale si possono dividere le occorrenti linee rette, devo ricordare che: *una retta*

qualunque può esser divisa in qualsiasi numero di parti uguali, mediante triangoli simili.

Perciocchè potendosi pigliare il lato di un angolo di qualunque conosciuta lunghezza e l'altro lato di una lunghezza data; tirando dai diversi punti di divisione del lato conosciuto al lato dato tante parallele, queste formeranno tanti triangoli simili, e la retta data sarà divisa come la presa.

Queste mie dimostrazioni sembreranno ad alcuni troppo lunghe, potendo dire più succintamente e senza ripetizioni, ciò che fu detto in più pagine. Io non iscrivo soltanto pei versati nella scienza; ma particolarmente per quelli che non conoscono che i soli elementi di Geometria, e sarei soddisfatto se questi mi comprendessero. Del resto, conosciute le costruzioni che danno sciolti i problemi, ognuno potrà dimostrarli a suo modo.

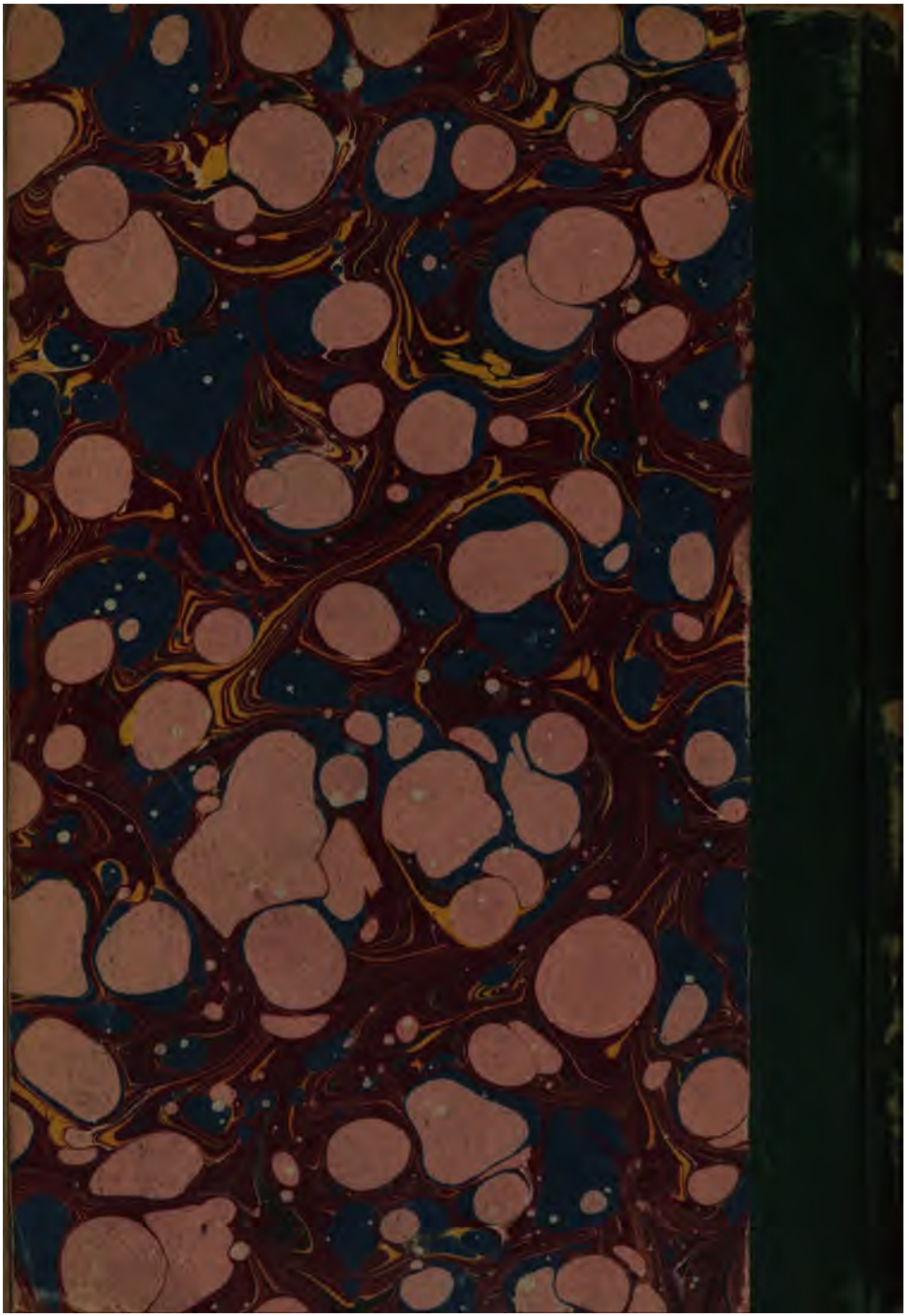
Ecco risoluto in questa maniera e colla Geometria elementare, cioè con la regola ed il compasso, il tanto cercato problema della QUADRATURA DEL CIRCOLO, che fu la barriera insormontabile di tanti celebri Geometri. Gli sforzi sostenuti per secoli dalle più colte nazioni, i vistosi premj da queste proposti non valsero per isvolgerlo. Il problema era passato per insolubile. Si rideva di colui che ne tentava lo scioglimento, ed io così deriso, per essermi più volte ingannato e persuaso mai sempre che a tal effetto bastava la semplice Geometria, rispondeva: *Rira bien qui rira le dernier.* In effetto, avessi anco le cento volte sbagliato, basta che nell' ultima fiata dica la verità, perchè l' indulgenza del Pubblico mi perdoni tutti i miei passati errori. Gran maraviglia! un cieco ha trovato un ferro da cavallo.

FINE.

q
p

a
l
p
t
s

c
e
I
n
c
s
l
p

n
p
n
t
c
q
b
c
d
m
G
I
b
l
p
u

q
7
a
l
F
t
s
c
e
L
n
c
s
l
p
n
p
D
t
c
q
b
c
d
m
G
I
b
l
p
u